



## Ultramodelos Globales y el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones en Sistemas No lineales Diferencialmente Planos

H. Sira-Ramírez<sup>a,\*</sup>, J. Linares-Flores<sup>b</sup>, A. Luviano-Juárez<sup>c</sup>, J. Cortés-Romero<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Cinvestav-IPN, Depto. Ing. Eléctrica, Secc. Mecatrónica. Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, AP 14740, 07300 México, D.F., México

<sup>b</sup>Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Carretera Acatlilma, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

<sup>c</sup>UPIITA-IPN, Av. IPN, No. 2580, Barrio La Laguna Ticomán, 07340 México, D.F. México

<sup>d</sup>Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Carrera 30 No. 45-03. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

### Resumen

Se introducen los ultra-modelos como un paradigma para la simplificación substancial del diseño de leyes de control por realimentación de salida, basadas en observadores, para el seguimiento de trayectorias en una amplia clase de sistemas planos inciertos. Un ultramodelo simplemente agrega, en la forma de una perturbación desconocida variante en el tiempo, los efectos combinados de todas las no-linealidades dependientes del estado (endógenas) así como también todas aquellas perturbaciones externas (exógenas) presentes en el modelo de entrada-salida plana del sistema. Como resultado, el diseño de un controlador basado en el ultramodelo global solo requiere del conocimiento de 1) los órdenes de Kronecker del sistema y 2) la matriz de funciones de ganancias de la entrada. Se propone un esquema de control basado en un observador extendido de alta ganancia para el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones en sistemas no lineales diferencialmente planos. Se incluye un ejemplo ilustrativo, con simulaciones realísticas consistente en el control de un motor síncrono de imanes permanentes. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados

**Palabras Clave:** Control Robusto, Observadores de Alta Ganancia, Rechazo Activo de Perturbaciones, Motor Síncrono de Imanes Permanentes.

### 1. Introduction

El Control por Rechazo Activo de Perturbaciones (ADRC por las siglas en inglés de *Active Disturbance Rejection Control*) constituye una metodología madura en el control de sistemas inciertos tanto lineales como no lineales. La idea principal consiste en la estimación precisa de la parte desconocida de la dinámica del sistema a ser controlado y proceder a cancelar sus efectos mediante la complementación de la ley de control con un esfuerzo de cancelación. Esta idea fundamental se atribuye al ingeniero francés Victor Poncelet, quien ya la utilizaba activamente a principios del siglo XIX (ver Tian y Gao (2009)). La idea de Poncelet fue formalizada, una centuria después, bajo el nombre de *Principio de Invarianza* por G. V. Shipanov, Shipanov (1939). El trabajo de Shipanov se tornó, aparentemente, en denominador común en los estudios de Ingeniería del Control Automático en la desaparecida Unión Soviética, de acuerdo a la revisión bibliográfica hecha por Poznyak et al. (1996). J. Han,

quien fuera educado en la antigua Unión Soviética y fuese expuesto a las técnicas de Shipanov, utilizó el método activamente en una serie de trabajos académicos e industriales, introduciendo un número de generalizaciones, extensiones y contribuciones originales Han (2009). De forma independiente, C.D. Johnson, propuso la idea de estimar el efecto agregado de una entrada de perturbación desconocida como si fuese representable por una variable de estado auxiliar Johnson (1971). Las múltiples contribuciones de Z. Gao y sus colaboradores representan el tema de un artículo de revisión bibliográfica en Zheng y Gao (2010). Sira-Ramírez y sus colaboradores han contribuido enfatizando el uso de observadores extendidos. En esos trabajos se ha propuesto la estimación total, si bien aproximada, de las perturbaciones y su combinación a controladores no lineales por cancelación para problemas de seguimiento de trayectorias en sistemas diferencialmente planos Sira-Ramírez et al. (2010a). La idea central en estos desarrollos del ADRC es la de tratar de manera conjunta los efectos de las incertidumbres dependientes no linealmente del estado y los de las entradas de perturbación exógenas como una función agregada, global, puramente dependiente del tiempo sin una estructura particular. Esta es, en forma precisa, una variante del concepto local, conocido como

\*H. Sira-Ramírez

Correos electrónicos: [hsira@cinvestav.mx](mailto:hsira@cinvestav.mx) (H. Sira-Ramírez), [jlinares@mexteco.utm.mx](mailto:jlinares@mexteco.utm.mx) (J. Linares-Flores), [aluvianoj@ipn.mx](mailto:aluvianoj@ipn.mx) (A. Luviano-Juárez), [jacortesr@unal.edu.co](mailto:jacortesr@unal.edu.co) (J. Cortés-Romero)

*ultramodelo local*, explotado en Fliess y Join (2013) en su propuesta reciente llamada *control libre de modelo*. En el corazón del método de control libre de modelo se encuentra el uso de modelos locales (de primero o segundo orden) en un esfuerzo por trivializar los problemas de control complejos. El uso de los ultramodelos locales, sin embargo, paga el precio de implementar un proceso de actualización caracterizado por identificaciones algebraicas en línea de coeficientes constantes provenientes de la aproximación polinómica local de los efectos de las perturbaciones. En este artículo se presenta la formalización de ultramodelos globales desde la perspectiva de sistemas equivalentes en trayectoria, un concepto introducido en Coleman (1966). El ultramodelo permite visualizar un sistema no lineal como un sistema lineal perturbado por una función variante en el tiempo desprovista de una estructura de estado. Aunque esta función de perturbación es totalmente desconocida, y por ello se requiere una estimación en línea de la misma, demostramos formalmente su existencia. La demostración de esta existencia es fundamental en la justificación formal del método ADRC, algo, hasta ahora, no establecido. Procedemos a ubicar los ultramodelos en el contexto del método de ADRC basado en observadores, para problemas de seguimiento de trayectorias en sistemas diferencialmente planos, con salidas planas disponibles. El método propuesto es enteramente lineal y desprovisto de actualizaciones sobre el ultramodelo. El efecto de las perturbaciones (endógenas y exógenas) se modela como un polinomio en el tiempo (polinomio de Taylor) empotrado en el modelo interno de un observador de alta ganancia. Esto permite evitarle al diseñador la necesidad de usar un observador basado en la estructura no lineal del sistema (frecuentemente inexistente) y proponer, en su lugar, un observador meramente lineal, módulo una inyección no lineal de las entradas a través de sus factores de ganancia. La estimación arbitrariamente cercana de la perturbación agregada, o incertidumbre aditiva total de la planta, permite entonces su cancelación aproximada mediante la acción de control apropiada. Este artículo está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 introduce los resultados generales acerca de los ultramodelos. La Sección 3 relaciona los ultramodelos a los problemas subyacentes de estimación y control lineales, que ellos intrínsecamente inducen en el caso general del control de sistemas no lineales diferencialmente planos, aditivamente perturbados. La Sección 4 presenta un ejemplo de aplicación ilustrativo que involucra a un motor síncrono de imanes permanentes. La última sección está dedicada a las conclusiones y sugerencias para trabajos futuros. El Apéndice contiene una demostración rigurosa del resultado principal utilizando la Teoría de las Perturbaciones Singulares.

## 2. Generalidades sobre los ultramodelos globales

Comenzamos el tratamiento de los ultramodelos globales en términos de una particularización de un concepto bien conocido: el de sistemas equivalentes en trayectoria, desarrollado en Coleman (1966). La existencia de un ultramodelo permite visualizar un sistema no lineal como un sistema lineal perturbado por una función del tiempo sin estructura de estado. La estimación aproximada, en línea, de esta función mediante un

observador lineal extendido de alta ganancia permite trivializar el problema de diseño del controlador y evadir el diseño de un observador no lineal para las variables de estado.

**Definición 1.** *Dos sistemas,*

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{z} = g(t, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

*se dicen ser equivalentes en trayectoria siempre que  $y(t) = z(t)$  para todo  $t \geq 0$  (i.e., en particular  $y_0 = z_0$ ). Se dicen ser asintóticamente equivalentes en trayectoria si para  $y_0 \neq z_0$ ,  $e = y(t) - z(t) \rightarrow 0$ . Se dicen ser asintóticamente, exponencialmente, equivalentes en trayectoria, si el error de convergencia a cero,  $e = y(t) - z(t)$ , es exponencialmente decreciente.*

Los sistemas equivalentes en trayectoria no tienen porqué ser parecidos en su forma, ni siquiera tienen porqué ser de la misma naturaleza, como lo ilustra el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 2.** *El sistema lineal,  $\dot{y} = A(t)y$ ,  $y(t_0) = y_0$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , es equivalente en trayectoria al sistema de integración pura,*

$$\dot{z} = A(t)\Phi_A(t, t_0)y_0, \quad z(t_0) = y_0, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

*donde  $\Phi_A(t, t_0)$  es la matriz fundamental asociada a  $A(t)$ , naturalmente,  $\dot{y} = A(t)y$ ,  $y(t_0) = y_0$  y  $\dot{z} = A(t)y(t)$ ,  $z(t_0) = y_0$  son equivalentes en trayectoria.*

Se presentan a continuación algunos resultados formales que relacionan los ultramodelos y sus ecuaciones diferenciales como sistemas equivalentes en trayectoria. Para empezar, se hace la hipótesis de una relación causal entre la ecuación diferencial no lineal y su ultramodelo. Esta causalidad resultará ser no crucial y podremos descartarla. Al hacerlo, se establece la validez de los ultramodelos como sistemas equivalentes en trayectoria a las ecuaciones diferenciales que los generan. Esta es la base fundamental del ADRC que permite reemplazar - en un sistema dinámico no lineal, escalar, de alto orden- los términos aditivos dependientes del estado y aquellos dependientes de señales exógenas por una única función de perturbación no estructurada dependiente solamente del tiempo. En referencia a la Figura

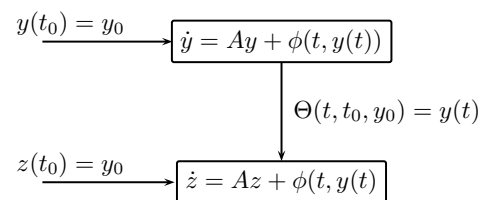


Figura 1: Sistemas equivalentes en trayectoria

1, considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales variantes en el tiempo,

$$\dot{y} = Ay + \phi(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

donde  $A$  es una matriz Hurwitz de  $n \times n$  y  $\phi(t, y)$  es un vector de no linealidades que incluye, posiblemente, señales exógenas. Designamos mediante  $y(t) = \Theta(t, t_0, y_0)$ , la *trayectoria solución* de la ecuación diferencial no lineal (1). Sea  $z$  un vector

$n$ -dimensional y considérese el siguiente sistema lineal provisto de una inyección exógena variante en el tiempo,

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + \phi(t, \Theta(t, t_0, y_0)) = Az + \phi(t, y(t)) \\ z(t_0) &= y_0 + b\end{aligned}\quad (2)$$

**Proposición 3.** Para  $b \neq 0$ , los sistemas (1) y (2) son asintóticamente, exponencialmente, equivalentes en trayectoria. Si  $b = 0$ , los sistemas son equivalentes en trayectoria.

**Demostración** En efecto, sea  $e = y(t) - z(t)$ , tenemos

$$\dot{e} = Ae + \phi(t, y(t)) - \phi(t, \Theta(t, t_0, y_0)) = Ae,$$

con  $e(t_0) = b$ . El resultado es inmediato.  $\square$

Enfatizamos que, en la demostración anterior, hemos utilizado los dos hechos siguientes: a) el vector variante en el tiempo  $y(t) = \Theta(t, t_0, y_0)$ , satisface trivialmente la identidad (véase Pontryagin (1962), Cap. 1, p. 19):

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}(t, t_0, y_0) &= A\Theta(t, t_0, y_0) + \phi(t, \Theta(t, t_0, y_0)), \\ \Theta(t_0, t_0, y_0) &= y_0,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \phi(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3)$$

b) La ecuación diferencial para  $z$  incluye una copia del término  $\phi(t, y)$  particularizado para la solución  $y = y(t) = \Theta(t, t_0, y_0)$  de la ecuación diferencial no lineal. Como tal, para cada condición inicial fija  $y_0$ , en un instante  $t_0$ , el término  $\phi(t, \Theta(t, t_0, y_0))$  constituye una función del tiempo expresada como  $\xi(t) = \phi(t, \Theta(t, t_0, y_0)) = \phi(t, y(t))$ .

**Ejemplo 4.** Considérese el siguiente sistema no lineal variante en el tiempo,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 16x_2 + \phi_2(t, x_1, x_2)\end{aligned}$$

con:  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -1$

$$\begin{aligned}\phi_1(t, x_1, x_2) &= \sin(0.1t) \cos(t) e^{-x_1^2} \cos(0.1x_2) \\ \phi_2(t, x_1, x_2) &= \cos(0.1t) \sin(t) e^{-x_2^2} \sin(0.1x_1)\end{aligned}$$

y el sistema equivalente en trayectoria,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{z}_2 &= -8z_1 - 16z_2 + \phi_2(t, x_1(t), x_2(t))\end{aligned}$$

con  $z_1(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0$ . La Figura 2 muestra la evolución de las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  del sistema no lineal y la evolución convergente de las variables de estado  $z_1$ ,  $z_2$  del sistema lineal, junto a los errores de seguimiento correspondientes,  $e_1 = x_1 - z_1$  y  $e_2 = x_2 - z_2$ .

**Teorema 5.** El sistema no lineal (1) es equivalente en trayectoria al sistema lineal forzado,  $\dot{z} = Az + \xi(t)$ ,  $z(t_0) = y_0$ , si y solamente si,

$$\xi(t) = \phi(t, y(t)) \quad \forall t \geq 0$$

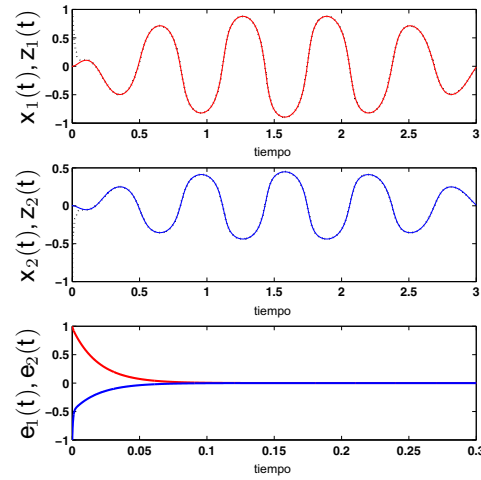


Figura 2: Evolución de los estados de sistemas asintóticamente, exponencialmente, equivalentes en trayectoria.

**Demostración.** Supóngase que los dos sistemas son equivalentes en trayectoria, entonces,  $e(t) = y(t) - z$  es idénticamente cero para todo  $t$ . Más aún,  $\dot{e}$  también es idénticamente cero. Por tanto,

$$\dot{e} = Ae + [\phi(t, y(t)) - \xi(t)] = \phi(t, y(t)) - \xi(t) = 0$$

lo cual implica que  $\phi(t, y(t)) = \xi(t)$  para todo  $t$ . Considérese ahora los sistemas:  $\dot{y} = Ay + \phi(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ , y  $\dot{z} = Az + \phi(t, y(t))$ ,  $z(t_0) = y_0$ . El error  $e = y(t) - z(t)$  evoluciona gobernado por:

$$\dot{e} = Ae, \quad e(t_0) = 0$$

por lo tanto,  $e(t)$ , es idénticamente cero para todo  $t$  y, entonces, ambos sistemas son equivalentes en trayectoria.  $\square$  La consecuencia de estos hechos sencillos es que podemos considerar al sistema no lineal (1) como un sistema lineal que incluye un término de inyección variante en el tiempo,  $\xi(t) = \phi(t, y(t))$ ,

$$\dot{z} = Az + \xi(t), \quad z(t_0) = y_0. \quad (4)$$

Estos dos sistemas, (1) y (4), son idénticos en el sentido preciso de que sus trayectorias son las mismas sobre cualquier intervalo de tiempo. En consecuencia, la distinción entre  $z$  e  $y$  se torna irrelevante. Cualquier consideración pertinente sobre el sistema (1) puede ser examinada sobre el sistema lineal equivalente en trayectoria (4), visto ahora, sin ambigüedad alguna como,

$$\dot{y} = Ay + \xi(t), \quad y(0) = y_0 \quad (5)$$

el cual se encuentra desprovisto de la estructura no lineal dependiente del estado. Nos referimos al sistema lineal perturbado (5) como al *ultramodelo global* del sistema no lineal (1). En la práctica, las no linealidades variantes en el tiempo, agregadas en  $\xi(t)$ , constituyen un término desconocido, actuando entonces como una perturbación propiamente dicha en el sistema.

**Nota 1.** El énfasis fundamental del desarrollo anterior estriba en que dado un sistema lineal cualquiera, perturbado por una función no lineal del estado y del tiempo (perturbación endógena y exógena), existe un modelo lineal perturbado por una función solamente del tiempo, que tiene exactamente la misma trayectoria de solución que el sistema no lineal cuando ambos evolucionan a partir de la misma condición inicial. Naturalmente, tal función del tiempo es desconocida a priori. Esta visualización del sistema permite, sin embargo, proponer un observador simultáneo de estados y perturbación basado, fundamentalmente, en el conocimiento de la parte lineal y la incorporación de un modelo genérico de aproximación polinomial para el modelado aproximado de la perturbación equivalente variante en el tiempo.

### 2.1. Cancelación exógena de no linealidades

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz Hurwitz. Considere los sistemas:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay, \quad y(t_0) = y_0, \\ \dot{z} &= Az + \phi(t, z) - \zeta(t), \quad z(t_0) = y_0\end{aligned}$$

con (véase la Figura 3)

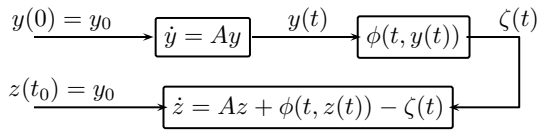


Figura 3: Cancelación exógena de no linealidades dependientes del estado.

$$\zeta(t) = \phi(t, y(t)) = \phi(t, \Phi_A(t, t_0)y_0)$$

Los dos sistemas anteriores son equivalentes en trayectoria. **Demostración** Para todo  $t$ , el error  $e = y - z(t)$  evoluciona de acuerdo a

$$\dot{e} = Ae + \phi(t, y(t)) - \phi(t, z(t)) = Ae + \phi(t, z(t) + e) - \phi(t, z(t))$$

con  $e(t_0) = 0$ . Se sigue que  $\dot{e}(t_0) = 0$ , implicando que  $\ddot{e}(t_0) = 0$  al igual que todas sus derivadas son cero en  $t = t_0$ . Por lo tanto,  $e(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0$ .  $\square$

**Ejemplo 6.** Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 16x_2\end{aligned}$$

con:  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -1$  y el sistema no lineal,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + \phi_1(t, z_1, z_2) - u\phi_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{z}_2 &= -8z_1 - 16z_2 + \phi_2(t, z_1, z_2) - u\phi_2(t, x_1(t), x_2(t))\end{aligned}$$

con  $z_1(0) = 1$ ,  $z_2(0) = -1$  y  $u \in \{0, 1\}$ , y sean

$$\begin{aligned}\phi_1(t, z_1, z_2) &= \sin(0.1t) \cos(t) e^{-z_1^2} \cos(0.1z_2) \\ \phi_2(t, z_1, z_2) &= \cos(0.1t) \sin(t) e^{-z_2^2} \sin(0.1z_1)\end{aligned}$$

Los dos sistemas son equivalentes en trayectoria siempre que  $u = 1$  para todo  $t$ .  $\square$

La Figura 4 ilustra que cuando la cancelación exógena en línea no está activada (y  $u = 0$  para todo  $t$ ), las trayectorias solución de las variables de estado de los dos sistemas son substancialmente diferentes; pero que ellas coinciden completamente cuando la cancelación exógena se activa (y  $u$  adopta el valor de 1 todo el tiempo).

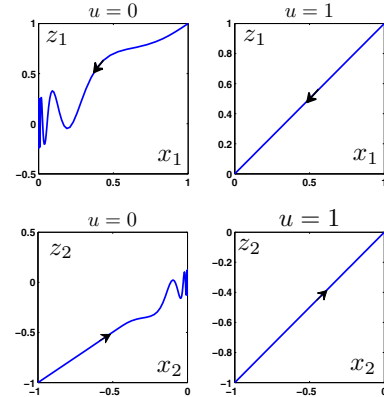


Figura 4: Cancelación exógena de no linealidades dependientes del estado.

Este resultado implica que el efecto de las no linealidades aditivas, dependientes del estado, pueden ser erradicadas en forma exacta del comportamiento del sistema mediante la inyección precisa de una señal vectorial variante en el tiempo generada exógenamente. Un observador asintótico basado en el ultramodelo de un sistema ejerce un efecto similar sobre un sistema en lazo cerrado que incluye un esfuerzo de cancelación de las no linealidades mediante un término estimado de la perturbación. Dado que, en la práctica, el modelo de la perturbación desconocida no puede ser exacto y que se utiliza una aproximación polinomial en el tiempo, la cancelación será necesariamente imperfecta, pero de índole tan cercana a la realidad como se requiera.

### 2.2. El caso de los sistemas no lineales controlados en representación de entrada-salida

Estamos particularmente interesados en aquellos casos donde las no linealidades aditivas ( $\phi(t, y)$ ) son inciertas debido a a) la falta de conocimiento de ciertos parámetros, b) a la presencia de no linealidades no modeladas dependientes del estado ó c) la combinación de estos dos casos previos con la presencia de señales variantes en el tiempo, inciertas, exógenas. De los resultados anteriores, consideramos a todos esos términos como un término de perturbación agregado, no estructurado,  $\xi(t)$ . Cuando el término de perturbación  $\xi(t)$  no puede reconstruirse en forma exacta, en línea, y solo se dispone de un conocimiento aproximado de su comportamiento (digamos mediante el uso de un observador asintótico), entonces, todavía se puede lograr una cancelación aproximada. En sistemas controlados

diferencialmente planos, los efectos de esta cancelación aproximada pueden ser adicionalmente contrarrestados mediante control realimentado de ganancia moderadamente alta para lograr seguimientos de trayectorias arbitrariamente cercanos. El problema subyacente, sin embargo, es claramente un problema lineal. Considere el sistema no lineal, escalar, diferencialmente plano,

$$\dot{y}^{(n)} = \psi(t, y)u + \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (6)$$

sujeto al siguiente conjunto de condiciones iniciales  $Y_0 = \{y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\}$ . En esta representación entrada-salida del sistema plano, la salida plana es, evidentemente, la función  $y$ . La ventaja de esta representación estriba en que el sistema (6) satisface automáticamente la conocida *condición de acoplamiento* cuando se reescribe en forma canónica de variables de fase. Nos referimos a la función  $\psi(t, y)$  como la *ganancia de entrada* del sistema. El término  $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  será identificado como la *función de deriva*.

**Proposición 7.** Para una función de entrada suave conocida,  $u(t)$ , sea  $y(t) = \Theta(t, t_0, Y_0, u(t))$  la trayectoria solución del sistema (6) a partir de las condiciones iniciales  $Y_0$ . El sistema siguiente,

$$\dot{z}^{(n)} = \psi(t, z)u + \phi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (7)$$

es equivalente en trayectoria al sistema (6) siempre y cuando la condición inicial de  $z$  y la de sus derivadas temporales,  $Z_0 = \{z(t_0), \dots, z^{(n-1)}(t_0)\}$ , coinciden con  $Y_0$ , i.e.,  $z^{(j)}(t_0) = y^{(j)}(t_0)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Demostración** La demostración está basada en el hecho de que la señal,  $e = y(t) - z(t)$ , satisface:

$$e^{(n)} = [\psi(t, y(t)) - \psi(t, z(t))]u(t)$$

con  $e^{(j)}(t_0) = 0$ , para todo  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Claramente,  $e^{(n)}(t_0) = 0$ . No es difícil establecer que  $e^{(n+k)}(t_0) = 0$  para todos los enteros  $k$ . Así,  $e(t) \equiv 0$  para todo  $t \geq t_0$  y los sistemas son equivalentes en trayectoria para la función de control dada  $u(t)$ . □ Al igual que antes, designamos mediante la función  $\xi(t)$ , a la función aditiva de deriva  $\phi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ , sin consideración de su estructura interna particular. Nos referimos al sistema equivalente en trayectoria,

$$\dot{y}^{(n)} = \psi(t, y)u + \xi(t) \quad (8)$$

como al *ultramodelo global* asociado al sistema (6).

### 3. Rechazo activo de perturbaciones para una clase de sistemas planos

#### 3.1. Formulación del problema e hipótesis

Se desea controlar la salida plana y del sistema,

$$\dot{y}^{(n)} = \psi(t, y)u + \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (9)$$

para lograr el seguimiento de una trayectoria suave de referencia  $y^*(t)$ , irrespectivamente de la naturaleza desconocida pero uniformemente acotada de la función de deriva  $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ . En relación al sistema controlado (9), hacemos las siguientes hipótesis:

1. La función de deriva  $\phi$  es completamente desconocida mientras que la ganancia de entrada,  $\psi(t, y)$ , es perfectamente conocida. Sea  $\epsilon$  un número real estrictamente positivo. La ganancia de entrada  $\psi(t, y(t))$  se supone es uniformemente acotada lejos de cero, i.e.,  $\inf_t |\psi(t, y(t))| \geq \epsilon > 0$ , para cualquier solución  $y(t)$  del sistema controlado. En particular, está acotada lejos de cero para la solución nominal  $y^*(t)$ .
2. Se supone que, uniformemente en  $t$ , existe una solución  $y(t)$  para cada conjunto de condiciones iniciales:  $Y_0$ , especificadas en el instante  $t = t_0$  y para una función de entrada suficientemente suave  $u(t) = u^*(t)$ . Dada una trayectoria de referencia,  $y^*(t)$ , la planitud del sistema, y la suposición previa, permite el cálculo de la entrada de control en lazo abierto  $u^*(t)$  correspondiente (véase Sira-Ramírez y Agrawal (2004)).
3. Sea  $m$  un entero dado. Como función del tiempo, la derivada de orden  $m$  de  $\xi(t) = \phi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  es uniformemente absolutamente acotada (en casi todas partes cuando sea necesario). En otras palabras, existe una constante  $K_m$  tal que,  $\sup_t |\xi^{(m)}(t)| = \sup_t |\phi^{(m)}(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))| \leq K_m$ .<sup>1</sup>

**Nota 2.** Nótese que  $K_m \in \mathbb{R}$  no se supone, necesariamente pequeño. La exigencia simplemente garantiza que el sistema, y el problema de control asociado, están bien definidos y no se presentan fenómenos de escape en tiempo finito y otras singularidades que estropean cualquier estrategia de control. Si  $|\xi^{(m)}(t)|$  no es acotado en conjuntos abiertos de la recta real, entonces  $|\xi(t)|$  tampoco lo es y por tanto no existen soluciones de la ecuación diferencial para ningún control finito.

#### 3.2. Un observador de alta ganancia

Haciendo:  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$ , ...,  $y_n = y^{(n-1)}$ , se obtiene el siguiente modelo -en variables de estado- del ultramodelo global del sistema no lineal incierto,

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= y_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n &= \psi(t, y_1)u + \xi(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Proponemos el siguiente observador, llamado observador Proporcional Integral Generalizado, o simplemente observador GPI (Generalized Proportional Integral) para las variables de fase  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  asociadas con la salida plana  $y$ , caracterizado por los estados  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ , y complementado con inyecciones de integrales iteradas del error de estimación de salida, caracterizadas

<sup>1</sup>Esta hipótesis no puede ser verificada *a priori* cuando  $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  es completamente desconocida. Sin embargo, en casos donde la no linealidad sea conocida excepto por algunos de sus parámetros, su validez puede ser verificada con un poco de trabajo. También, si  $\xi^{(m)}(t)$  no es uniformemente acotada en forma absoluta en casi todas partes, entonces las soluciones  $y(t)$  para (9) no existen, para cualquier entrada  $u(t)$  finita (véase Gliklikh (2006)).



por las variables  $z_1$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{n+m-1}(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_j &= \hat{y}_{j+1} + \lambda_{n+m-j}(y_1 - \hat{y}_1), \quad j = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{y}}_n &= \psi(t, y_1)u + z_1 + \lambda_m(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i}(y_1 - \hat{y}_1), \quad i = 2, \dots, m-1 \\ \dot{z}_m &= \lambda_0(y_1 - \hat{y}_1)\end{aligned}\quad (11)$$

Defínase el error de estimación de salida,  $e_y$ , como  $e_y = e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y - \hat{y}_1$  con  $e_2 = y_2 - \hat{y}_2$ , etc.,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_{n+m-1}e_1 \\ \dot{e}_j &= e_{j+1} - \lambda_{n+m-j}e_1, \quad j = 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= \xi(t) - z_1 - \lambda_me_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}e_1 \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i}e_1, \quad i = 2, \dots, m-1 \\ \dot{z}_m &= \lambda_0e_1\end{aligned}\quad (12)$$

El error de estimación,  $e_y = e_1$ , satisface, después de eliminar todas las variables  $z$ , la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada de orden  $n+m$ ,

$$e_y^{(n+m)} + \lambda_{n+m-1}e_y^{(n+m-1)} + \dots + \lambda_1\dot{e}_y + \lambda_0e_y = \xi^{(m)}(t) \quad (13)$$

**Teorema 8.** Supóngase que todas las hipótesis anteriores son válidas. Escogamos los coeficientes  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n+m-1$ , del polinomio característico en la variable compleja  $s$

$$p_o(s) = s^{n+m} + \lambda_{n+m-1}s^{n+m-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \quad (14)$$

de tal forma que, para un número real suficientemente grande  $N > 0$ , el polinomio  $p_o(s)$  exhibe todas sus raíces a la izquierda de la línea  $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \leq -N\}$ , en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Entonces, las trayectorias del error de estimación,  $e_y(t)$ , y de sus derivadas temporales,  $e_y^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, n+m-1$ , convergen globalmente hacia una esfera,  $S(0, \rho)$  centrada en el origen del espacio de fase  $\{e_y, \dot{e}_y, \dots, e_y^{(n+m-1)}\}$ , de radio  $\rho$  tan pequeño como sea necesario, donde permanecen definitivamente acotadas. A mayores valores de  $N$ , más pequeño el radio de la esfera  $S(0, \rho)$ . En forma similar, la variable  $z_1$  y sus derivadas temporales,  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , siguen arbitrariamente de cerca la función desconocida del tiempo,  $\xi(t)$ , y sus derivadas temporales  $\xi^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**Demostración** Sea  $x = (e_1, \dots, e_{n+m})^T$  el vector de variables de fase del sistema (13). El sistema lineal perturbado (13) es de la forma:  $\dot{x} = Ax + b\xi^{(m)}(t)$ , con  $A$  una matriz Hurwitz escrita en forma compañera y  $b$  un vector de ceros excepto por la última componente que es igual a 1. Sea  $|\text{Re}(\sigma_{\max}(A))|$  el valor absoluto de la parte real negativa del autovalor menos negativo de la matriz  $A$ . Es claro entonces que  $|\text{Re}(\sigma_{\max}(A))| \geq N$ . El carácter Hurwitz de  $A$  implica que para cada matriz constante de  $(n+m) \times (n+m)$ , simétrica y positiva definida  $Q = Q^T > 0$ , existe una única matriz simétrica positiva definida,  $P = P^T > 0$ , de  $(n+m) \times (n+m)$  tal que  $P$  es la solución de  $A^T P + PA = -Q$ . Usando esta matriz  $P$ , así determinada, en la conformación de

una candidata a función de Lyapunov,  $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ , podemos constatar que  $V(x)$  exhibe una derivada temporal, a lo largo de las soluciones del sistema en lazo cerrado, dada por  $\dot{V}(x, t) = \frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x + x^T Pb\xi^{(m)}(t)$ . Dado que  $A$  es Hurwitz, y  $Q$  es definida positiva de valores propios positivos finitos, los valores propios de  $P$  también son finitos y positivos. Considerando como norma, la norma 2 para vectores, así como la norma inducida para matrices, se tienen los siguientes hechos Hogben (2006):

- 1) Los valores propios de matrices simétricas son reales
- 2) La norma de una matriz cuadrada  $A$  es la magnitud de su valor singular más grande, denotada por  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A)$
- 3)  $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$
- 4) Para  $L$  matriz y  $x$  vector, ambos de dimensiones apropiadas,  $\|Lx\|_2 \leq \|L\|_2 \|x\|_2$ .

Así se tiene para  $\|\dot{V}\|_2$ , de 3),  $\|\dot{V}\|_2 \leq \|\frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x\|_2 + \|x^T Pb\xi^{(m)}(t)\|_2$ . Por otra parte, el término  $\|\frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x\|_2$  está acotado como sigue: Utilizando el hecho 4) y luego el 3),  $\|\frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x\|_2 \|A^T P + PA\|_2 \|x\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x\|_2^2 (\|A^T P\|_2 + \|PA\|_2)$ . Como la norma de una matriz es igual a la norma de su transpuesta, se sigue que  $\|A^T P\|_2 + \|PA\|_2 = 2\|PA\|_2$ . Finalmente, volviendo a utilizar 4), se tiene que  $\frac{1}{2}\|x\|_2^2 (\|A^T P\|_2 + \|PA\|_2) = \|x\|_2^2 \|PA\|_2 \leq \|x\|_2^2 \|P\|_2 \|A\|_2$ . La norma 2 de la matriz  $A$ , coincide con su radio espectral (ver sección 1.7, Demmel (1997)). Como los valores propios tiene parte real estrictamente negativa, se puede tomar el valor singular más grande,  $(\sigma_{\max}(A))$ , como una cota superior consistente para el lado derecho de la desigualdad. Se sigue que  $\|1/2x^T (A^T P + PA)x\|_2 \leq \|x\|_2^2 \|P\|_2 \|\sigma_{\max}(A)\|$ . Luego,  $\dot{V}(x, t) \leq -\|x\|_2^2 \|P\|_2 \|\sigma_{\max}(A)\| + K_m \|x\|_2 \|P\|_2 = -\|x\|_2 \|P\|_2 (\|\sigma_{\max}(A)\| \|x\|_2 - K_m)$ . Esta función es estrictamente negativa fuera de la esfera  $S(0, \rho)$ , dada por:  $S(0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \|x\|_2 \leq \rho, \rho = cK_m / \|\sigma_{\max}(A)\| \leq cK_m / N\}$ , donde la constante  $c$  es una constante de proporcionalidad, la cual engloba los efectos de la perturbación  $\xi$ , no desvaneciente, acotada por una constante  $K_0$ , (hipótesis 3), (mayores detalles ver Lema 9.2 de Khalil (2002)). Puesto que  $P$  es positiva definida, y el elipsoide:  $\{x \mid x^T Px \leq \alpha\}$  es compacto para cada  $0 < \alpha$ , existen conjuntos de nivel de  $V(x)$  contenidos en la esfera de radio  $\rho$  para cualquier  $\alpha < \rho$ . Por lo tanto, todas las trayectorias  $x(t)$  que empiezan fuera de la esfera convergen hacia su interior, y todas las trayectorias que se inician dentro de la esfera  $S(0, \rho)$  nunca la abandonan. Mientras más negativa es la parte real del autovalor dominante de  $A$ , mayor es la cantidad,  $|\sigma_{\max}(A)|$ , y en consecuencia, menor es el radio de la esfera,  $S(0, \rho)$ , que acota definitivamente las trayectorias en el espacio  $x$ . De la ecuación (12) se sigue que  $z_1 = \phi(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) - \lambda_me_1 - \dot{e}_n = \xi(t) - \lambda_me_1 - \dot{e}_n$ . Por lo tanto, a medida que  $e_1$  y  $\dot{e}_n$  evolucionan hacia la esfera de acotamiento en el espacio de fases de los errores de estimación, la trayectoria  $z_1$  sigue, arbitrariamente cerca, la función de perturbación,  $\xi(t) = \phi(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ . En general,  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , converge hacia una vecindad tan pequeña como sea

deseable de  $\xi^{(i-1)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Puesto que  $z_1 - \xi(t)$  está acotado, el estimado aproximado  $z_1$ , del término de perturbación del ultramodelo,  $\xi(t)$ , es *auto-actualizante*. A partir de la definición de los errores de estimación para  $y$ , y sus derivadas temporales, se sigue que  $\hat{y}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , reconstruyen, de una forma arbitrariamente cercana, las derivadas de  $y$ .  $\square$

El resultado anterior, potestativo del enfoque de ultramodelos, es derivable también desde la perspectiva de las perturbaciones singulares. La demostración, necesaria cuando se insiste en la presencia de los estados en la función de perturbación, se presenta en el apéndice.

### 3.3. El controlador linealizante que cancela las perturbaciones

El controlador de seguimiento de trayectoria está dado por,

$$u = \frac{1}{\psi(t, y)} \left[ [y^*(t)]^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (\hat{y}_{k+1} - [y^*(t)]^{(k)}) - z_1 \right] \quad (15)$$

donde el conjunto de coeficientes  $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  se elige de tal forma que  $p_c(s) = s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \dots + \gamma_0$  exhiba todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo  $\mathbb{C}$ . El error de seguimiento de la salida plana en lazo cerrado  $e = y - y^*(t)$ , está gobernado por:

$$e^{(n)} + \gamma_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \gamma_0 e = (\xi(t) - z_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k e_y^{(k)} \quad (16)$$

**Teorema 9.** *El controlador realimentado de rechazo de perturbación (15) conduce a la trayectoria controlada de la salida plana  $y(t)$ , hacia una vecindad, tan pequeña como se desee, del origen de el espacio de fases del espacio del error de seguimiento,  $(e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$ , siempre que el conjunto de coeficientes:  $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ , se elija de tal forma que  $p_c(s)$  sea un polinomio de Hurwitz con raíces suficientemente alejadas del eje imaginario en  $\mathbb{C}$ .*

**Demostración** De acuerdo al teorema previo, el término  $\xi(t) - z_1$ , y los términos,  $e_y^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , evolucionan en una vecindad tan pequeña como se desee del origen. Se sigue que el miembro derecho del sistema lineal (16) evoluciona, de una manera uniforme y acotada, dentro de una vecindad suficientemente pequeña del origen del espacio de fase del error de seguimiento de la salida. Usando los mismos argumentos de la demostración del teorema anterior, se sigue que el error de seguimiento,  $e$ , y sus derivadas temporales, convergen hacia una vecindad tan pequeña como se requiera del origen de coordenadas,  $z = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$ , del espacio de fases del error de seguimiento, siempre y cuando las raíces de  $p_c(s)$  estén ubicadas suficientemente a la izquierda del eje imaginario en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Nota 3.** *La implementación del algoritmo ADRC basado en el observador GPI requiere de filtraje paso bajo, junto a un embrague de las señales de salida del observador. El entero  $m$ , que indica el orden de la aproximación de la señal de perturbación,  $\xi(t)$ , se elige, típicamente, como  $m = 3$ , o, a lo máximo,  $m = 5$  (véanse detalles experimentales en Sira-Ramírez et al. (2010b)).*

**Nota 4.** *Es cierto que, en el caso de los sistemas (9), un controlador de alta ganancia por sí solo puede atenuar considerablemente el efecto de las perturbaciones aditivas desconocidas, y lograr un seguimiento de trayectoria tan cercano como se desee. Esto sin embargo, requiere del conocimiento cabal de las variables de fase del sistema aparte de producir efectos indeseables en la respuesta en lazo cerrado (amplificación de ruidos, etc). El uso del observador extendido para producir, simultáneamente, una estimación aproximada de las variables de fase y de la perturbación, alivia considerablemente la necesidad de usar altas ganancias en el controlador gracias a la cancelación aproximada de la perturbación misma por la acción del control. Esta es la base práctica del ADRC.*

## 4. Control del motor síncrono: caso de estudio

### 4.1. El modelo a-b.

El Motores Síncronos de Imanes Permanentes (MSIP) se describe mediante el siguiente sistema multivariable de ecuaciones diferenciales, escritas en las llamadas *coordenadas a-b*:

$$\begin{aligned} L_s di_a/dt &= -R_s i_a + K_m \sin(n_p \theta_r) \omega + u_a \\ L_s di_b/dt &= -R_s i_b - K_m \cos(n_p \theta_r) \omega + u_b \\ J \dot{\omega} &= K_m [-i_a \sin(n_p \theta_r) + i_b \cos(n_p \theta_r)] - B \omega - \tau_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $u_a$  y  $u_b$  son los voltajes de entrada de control  $i_a$  e  $i_b$  son las corrientes de fase.  $\tau_L$  es el par exógeno, considerado como desconocido y posiblemente variante en el tiempo. Las variables  $\theta$  y  $\omega$  representan, respectivamente, el desplazamiento angular medido y la velocidad angular correspondiente. La variable  $\theta_r$  representa la posición angular absoluta del rotor. Enfatizamos sobre una distinción necesaria entre *el desplazamiento angular* y la *posición angular*. El desplazamiento angular, representado por  $\theta$ , se mide desde la posición inicial absoluta  $\theta_0$  que es desconocida. Tenemos  $\theta_r = \theta_0 + \theta$ ; la velocidad angular,  $\omega$  está dada por  $\dot{\theta}_r = \dot{\theta} = \omega$ . Recurrimos a una notación en variables complejas, definidas mediante  $z = i_a + j i_b$ ,  $u = u_a + j u_b$ ,  $\cos(n_p \theta_r) + j \sin(n_p \theta_r) = e^{j n_p \theta_r}$ , con  $\bar{z} = i_a - j i_b$ ,  $\cos(n_p \theta_r) - j \sin(n_p \theta_r) = e^{-j n_p \theta_r}$ . En términos de estas variables complejas, el modelo anterior se escribe simplemente como sigue:

$$\begin{aligned} L_s \dot{z} &= -R_s z - j K_m \omega e^{j n_p \theta_r} + u \\ J \dot{\omega} &= K_m \text{Im}(z e^{-j n_p \theta_r}) - B \omega - \tau_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (18)$$

### 4.2. El modelo d-q

Defínase,

$$\zeta = i_d + j i_q = z e^{-j n_p \theta}, \quad \vartheta = v_d + j v_q = u e^{-j n_p \theta} \quad (19)$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} L_s \dot{\zeta} &= -(R_s + j n_p \omega L_s) \zeta - j K_m \omega e^{j n_p \theta_0} + \vartheta \\ J \dot{\omega} &= K_m \text{Im}(\zeta) - B \omega - \tau_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (20)$$

o de manera explícita

$$\begin{aligned} L_s di_d/dt &= -R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + K_m \omega \sin(n_p \theta_0) + v_d \\ L_s di_q/dt &= -R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega \cos(n_p \theta_0) + v_q \\ J \dot{\omega} &= K_m i_q - B \omega - \tau_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (21)$$

Nótese que cuando  $\theta_0 = 0$ , i.e., cuando la posición angular coincide con el desplazamiento angular, se obtiene el modelo tradicional en coordenadas  $d-q$ .

#### 4.3. Planitud del modelo $d-q$ y el ultramodelo global del MSIP

El modelo en coordenadas  $d-q$  dado en (21), es *diferencialmente plano* con salidas planas dadas por  $\theta$  e  $i_d$ . Ciertamente, todas las variables del sistema son parametrizables diferencialmente en términos de las salidas planas (ver Delaleau y Stanković (2004)):

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\theta} \\ i_q &= \left( \frac{J}{K_m} \right) \ddot{\theta} + \frac{B}{K_m} \dot{\theta} + \frac{\tau_L}{K_m} \\ v_q &= \left( \frac{L_s J}{K_m} \right) \frac{d^3 \theta}{dt^3} + \left( \frac{L_s B}{K_m} + \frac{J R_s}{K_m} \right) \ddot{\theta} + \left( \frac{R_s}{K_m} \right) \dot{\theta} + \frac{L_s}{K_m} \dot{\tau}_L \\ &\quad + \left( \frac{R_s B}{K_m} + n_p L_s i_d + K_m \cos(n_p \theta_0) \right) \dot{\theta} \\ v_d &= L_s \frac{di_d}{dt} + R_s i_d - n_p \dot{\theta} L_s \left( \frac{J}{K_m} \ddot{\theta} + \frac{B}{K_m} \dot{\theta} + \frac{\tau_L}{K_m} \right) \\ &\quad - K_m \dot{\theta} \sin(n_p \theta_0) \end{aligned} \quad (22)$$

El controlador linealizante basado en el observador GPI está construido sobre una visión particularmente simple de las relaciones entre las entradas y las salidas planas. Hipotetizamos un *ultramodelo global*, o un *modelo fenomenológico de entrada salida* del sistema descrito por los siguientes modelos lineales desacoplados, variantes en el tiempo,

$$\begin{aligned} d^2 \omega / dt^2 &= (K_m / (L_s J)) v_q + \xi_w(t) \\ di_d / dt &= (1 / L_s) v_d + \xi_i(t) \end{aligned} \quad (23)$$

donde, evidentemente, las perturbaciones endógenas (dependientes del estado) y las perturbaciones exógenas (dependientes de los disturbios) están dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_w(t) &= \xi_w(R_s(t), B, \theta_0, i_d, \omega, \dot{\omega}, \tau_L(t), \dot{\tau}_L(t)) \\ \xi_i(t) &= \xi_i(R_s(t), B, \theta_0, i_d, \omega, \omega^2, \dot{\omega}, \tau_L(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

Estas funciones han de considerarse como funciones solamente del tiempo, sin consideración específica de su dependencia no lineal ni de la arquitectura interna que ofrezcan las señales exógenas. Este punto de vista, que luce controversial a la luz de la influencia dominante del campo de las ecuaciones diferenciales en la literatura del control automático, se encuentra en el corazón de resultados bien establecidos de las técnicas del control no lineal robusto, tales como: Control por Acomodo de las Perturbaciones Johnson (1971), Control por Rechazo Activo de Perturbaciones Han (2009) y, más recientemente, en el llamado, *Control Libre de Modelo* Fliess y Join (2013).

#### 4.4. Formulación del problema e hipótesis

- La velocidad angular,  $\omega$ , el desplazamiento angular  $\theta$ , y la corriente  $i_d$  son medibles. La posición inicial  $\theta_0$  es desconocida y, por lo tanto, la posición angular  $\theta$ , no está disponible. Se supone que la posición inicial del eje se encuentra acotada por el intervalo  $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2n_p}, \frac{\pi}{2n_p})$ .
- El par de carga  $\tau_L(t)$  es variante en el tiempo y del cual se sabe, solamente, que se encuentra uniformemente acotado en forma absoluta. En lo demás el par de carga es completamente desconocido.
- Solo se conocen los parámetros  $\{L_s, K_m, J, n_p\}$ . La resistencia variante en el tiempo  $R_s(t)$ , el coeficiente de fricción viscosa,  $B$ , y la posición inicial  $\theta_0$ , son desconocidos.
- Para enteros positivos suficientemente grandes,  $m$  y  $p$ , las cantidades  $\xi_w(t)$  y  $\xi_i(t)$ , consideradas como funciones del tiempo exhiben, respectivamente, derivadas temporales uniformemente acotadas en forma absoluta hasta órdenes  $m$  y  $p$ , respectivamente,  $\sup_t |\xi_w^{(j)}(t)| \leq W_j$  y  $\sup_t |\xi_i^{(k)}(t)| \leq K_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, p$

Dado el modelo incierto del MSIP (21) incluyendo la validez de todas las suposiciones previas, encontrar un controlador por realimentación de las salidas planas que logre el seguimiento de la trayectoria de referencia,  $\omega^*(t)$ , para la velocidad angular, y el de la trayectoria de referencia de corriente  $i_d^*(t)$ , en el eje  $d$ , irrespectivamente de los valores adoptados por el torque variante en el tiempo  $\tau_L(t)$ , así como de la resistencia de estator  $R_s(t)$  y de los valores iniciales de la posición angular del eje del motor  $\theta_0$ .

#### 4.5. Resultados Principales

Dado el modelo anteriormente descrito del MSIP (21), el par de observadores GPI (26) y (27) estiman, mediante las variables  $z_{1w}$  y  $z_{1i}$ , y dentro de una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio de fase del error de estimación tanto las funciones agregadas de perturbación  $\xi_w(t)$ ,  $\xi_i(t)$ , dadas por (23)-(24), como las variables de fase asociadas al desplazamiento angular,  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$ , mediante las variables  $w_1 = \hat{\omega}$  y  $w_2 = \dot{\hat{\omega}}$ , siempre y cuando los conjuntos de coeficientes de diseño:  $\{\gamma_{w0}, \dots, \gamma_{w(m+1)}\}$ ,  $\{\gamma_{i0}, \dots, \gamma_{i(p)}\}$ , se escojan de tal manera que las raíces de los siguientes polinomios característicos en la variable compleja  $s$ :  $p_w(s)$  and  $p_i(s)$ , se encuentren ubicadas suficientemente lejos del eje imaginario en el semiplano izquierdo del plano complejo:

$$\begin{aligned} p_w(s) &= s^{m+2} + \gamma_{w(m+1)} s^{m+1} + \dots + \gamma_{w1} s + \gamma_{w0} \\ p_i(s) &= s^{p+1} + \gamma_{ip} s^3 + \dots + \gamma_{i1} s + \gamma_{i0} \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 + \gamma_{w(m+1)}(\omega - w_1) \\ \dot{w}_2 &= \frac{K_m}{J L_s} v_q + z_{1w} + \gamma_{wm}(\omega - w_1) \\ \dot{z}_{jw} &= z_{(j+1)w} + \gamma_{w(m-1)}(\omega - w_1), \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \dot{z}_{mw} &= \gamma_{w0}(\omega - w_1) \end{aligned} \quad (26)$$



y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{i}_d &= \left(\frac{1}{L_s}\right)v_d + z_{1i} + \gamma_{ip}(\hat{i}_d - i_d) \\ \dot{z}_{ji} &= z_{(j+1)i} + \gamma_{i(p-1)}(\hat{i}_d - i_d), \quad j = i, \dots, p-1 \\ \dot{z}_{pi} &= \gamma_{i0}(\hat{i}_d - i_d)\end{aligned}\quad (27)$$

#### 4.6. Controlador basado en observador GPI

El controlador por retroalimentación de las salidas planas, basado en observadores GPI, provistos de términos de rechazo de perturbaciones  $z_{1w}$  y  $z_{1i}$ ,

$$\begin{aligned}v_q &= \frac{L_s J}{K_m} [\ddot{\omega}^*(t) - z_{1w} - \kappa_1^w(w_2 - \dot{\omega}^*(t)) - \kappa_0^w(\omega - \omega^*(t))] \\ v_d &= L_s \left[ \frac{di_d^*(t)}{dt} - z_{1i} - \kappa_0^i(i_d - i_d^*(t)) \right]\end{aligned}\quad (28)$$

asintótica exponencialmente fuerza las trayectorias del error de seguimiento en lazo cerrado del MSIP hacia una vecindad tan pequeña como se quiera del origen del espacio de fases del error de seguimiento, siempre y cuando las raíces de los polinomios característicos, en la variable compleja  $s$ ,  $p_{wc}(s) = s^2 + \kappa_1^w s + \kappa_0^w$ ,  $p_{ic}(s) = s + \kappa_0^i$ , se encuentren ubicadas suficientemente lejos a la izquierda del eje imaginario en el plano complejo.

#### 4.7. Resultados de simulación utilizando el paquete PSIM

Se realizaron simulaciones del desempeño del controlador ADRC basado en observadores GPI para un MSIP, utilizando el paquete Matlab/Simulink-PSIM, utilizando los parámetros de la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del motor y datos de los devanados.

Parámetros	Valores
$R_s$	1.25 $\Omega$
$L_d$	6.65 mH
$L_q$	6.65 mH
$V_{pk}/\text{krpm}$	63.639 V
No. de Polos P	4
Momento de Inercia ( $J$ )	0.22E-3 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Constante Mec. de Tiempo ( $\tau_{mech}$ )	2.0944 s.
Coefficiente de Fricción ( $B = \frac{J}{\tau_{mech}}$ )	1.0504E-4 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

La simulación numérica consistió en un MSIP trifásico con fuerza contraelectromotriz sinusoidal. Una fuente de voltaje a inversor trifásico de Modulación de Ancho de Pulsos (MAP). Tres sensores de corriente, tres sensores de voltaje, dos bloques de transformación de coordenadas  $abc$  a  $dqo$  para los voltajes y corrientes de fase. Un bloque de transformación  $dqo$  a  $abc$  para los controladores basados en observadores GPI. Un bloque del sensor trifásico, un sensor de velocidad, un bloque de carga mecánica (controlada externamente) y un conjunto de ramas de resistores trifásicos para los cambios bruscos de resistencia de estator. Por medio del esquema de simulación mostrado anteriormente, se lograron los siguientes objetivos:

1. Seguimiento de una trayectoria de referencia deseada bajo pares de carga variantes en el tiempo.

2. Robustez bajo cambios súbitos de la resistencia del estator.

3. Robustez a la ignorancia de las condiciones iniciales de la posición angular del rotor.

Para las pruebas de simulación, hemos propuesto una par de carga externo variante en el tiempo,  $\tau_L$ , suficientemente complejo, dado por:  $\tau_L = 2 + 1.5 \sin(3t)$  [Nm], para  $t < 3$ , y  $4 + 1.5 \sin(3t)$  [Nm] cuando  $t \geq 3$ , y para las trayectorias de referencia deseadas,  $i_d^*(t)$  y  $\omega^*(t)$ , hemos escogido las siguientes funciones  $i_d^*(t) = 0$ ,

$$\omega^*(t) = \begin{cases} \bar{\omega}_{ini}, & \text{si } t < t_{ini} \\ \bar{\omega}_{fin}, & \text{si } t > t_{fin} \\ \bar{\omega}_{ini} + (\bar{\omega}_{fin} - \bar{\omega}_{ini})b(t)\left(\frac{t-t_{ini}}{t_{fin}-t_{ini}}\right), & \text{si } t_{ini} < t < t_{fin} \end{cases}$$

utilizando un polinomio de Bézier (ver Biagiotti y Melchiorri (2008)), de la forma  $b(t) = 252t^5 - 1050t^6 + 1800t^7 - 1575t^8 + 700t^9 - 126t^{10}$ . La velocidad angular inicial se fijó en  $\bar{\omega}_{ini}(1.0)=0$  rad/s y el valor final deseado de la velocidad angular se especificó como  $\bar{\omega}_{ini}(2.5)=250$  rad/s. El ángulo de posición inicial se fijó en  $\theta_0 = \pi/6$  rad. Los parámetros de configuración de las simulaciones fueron: Instante inicial: 0.0. Instante final: 5 s. Tipo de Integración: paso fijo, Integrador: ode1 (Euler), paso de integración fijo (periodo de muestreo fundamental): 0.0001 s. La Figura 5 muestra el desempeño del controlador linealizante por realimentación de salida plana, basado en observadores GPI, utilizados para el doble propósito de lograr un seguimiento robusto y bastante preciso de la trayectoria de referencia de velocidad angular y la estabilización a cero de la corriente en el eje  $d$ , en la presencia de un par de carga variante en el tiempo y bajo variaciones severas del parámetro  $R_s(t)$ , que consistieron en un valor  $R_s = 5.25 \Omega$  para  $t < 2.5$  s, y un valor  $R_s = 1.25$  para  $t \geq 2.5$  s. La figura muestra la estimación de los efectos agregados de las señales de perturbación endógenas y exógenas hipotetizadas en el ultramodelo. La precisión de las estimaciones redundantes de la velocidad angular y de la corriente en el eje  $d$ , generadas por los observadores GPI, también se muestran en la figura.

## 5. Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se ha presentado una justificación teórica, junto a una aplicación tecnológica, de la injerencia de los ultramodelos globales en el control, tipo ADRC, por realimentación de salida en tareas de seguimiento de trayectorias para sistemas no lineales diferencialmente planos de múltiples entradas y múltiples salidas. A nuestro conocimiento, esta justificación formal del método ADRC, desde la óptica de los sistemas de trayectoria equivalente y el método de las perturbaciones singulares, no existe en la literatura. Los ultramodelos globales constituyen una herramienta conceptual que resulta en una simplificación substancial de las tareas de estimación de estados y de control, por retroalimentación de salidas, para la solución del problema de seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales inciertos, diferencialmente planos, posiblemente perturbados de manera exógena. Se propusieron observadores extendidos de Luenberger de alta ganancia, llamados observadores

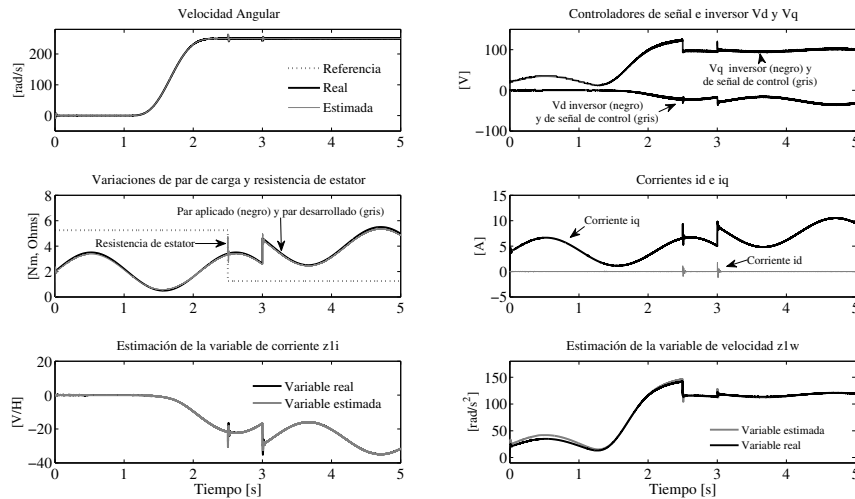


Figura 5: Desempeño en el seguimiento de la velocidad angular del ADRC basado en observadores GPI con estimación de los efectos agregados de los parámetros inciertos ( $R_s(t)$ ) y de las perturbaciones exógenas de par de carga ( $\tau_L(t)$ ).

GPI, para la estimación simultánea, aunque aproximada, de las perturbaciones dependientes del estado y de las variables de fase asociadas a cada salida plana. Como temas de investigación a futuro, se propone estudiar el caso de control ADRC de los sistemas diferencialmente planos donde la salida plana no es medible. Es de notar que este caso ofrece dificultades formidables puesto que la teoría de observadores de estado para sistemas no lineales inciertos ha encontrado limitaciones estructurales fundamentales fuera del ámbito de las soluciones de inyección discontinua. Sin embargo, el control de seguimiento de señales de referencia para salidas no planas, en sistemas planos, ha recibido atención para el caso más importante en el que las salidas consideradas son de fase no mínima (véase Fliess et al. (1998)). El método ADRC puede extenderse a este último caso sin dificultades mayores. Se considera como otra aportación una forma menos excluyente para la clase de perturbaciones a analizar, suponiendo, en lugar de condiciones de diferenciabilidad, condiciones de tipo Lipschitz (ver Zak (1990)).

## 6. English Summary

### Global Ultra-models in Active Disturbance Rejection Control of Nonlinear Differentially Flat Systems.

#### Abstract

Global ultra-models are introduced as a paradigm for vastly simplifying the design of observer-based linear output feedback control laws in output trajectory tracking problems for a large class of uncertain nonlinear flat systems. An ultra-model simply lumps, as an unknown time-varying disturbance, the combined effects of all uncertain state-dependent (i.e., endogenous) nonlinearities as well as those of external (i.e., exogenous) perturbation inputs present in the input-to-flat output model of the system. As a result, a global ultra-model based controller design only requires knowledge of the system order and of the

nonlinear control input gain function. An extended high gain observer based control scheme is proposed for linear Active Disturbance Rejection (ADRC) for nonlinear differentially flat systems. An illustrative case study example is presented. *Keywords:*

Robust control, Active Disturbance Rejection Control, High Gain Observers, Disturbance Estimation, Permanent Magnet Synchronous Motor

## Referencias

- Biagiotti, L., Melchiorri, C., 2008. Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots. Springer-Verlag.
- Coleman, C., 1966. Local trajectory equivalence of differential systems. Proceedings of the American Mathematical Society 16, 890–892.
- Delaleau, E., Stanković, A., 2004. Flatness-based hierarchical control of the pm synchronous motor. In: Proceedings of the 2004 American Control Conference. pp. 65–70.
- Demmel, J., 1997. Applied Numerical Linear Algebra. SAIM.
- Fliess, M., Join, C., 2013. Model-free control. International Journal of Control 86 (12), 2228–2252.
- Fliess, M., Sira-Ramírez, H., Marquez, R., 1998. Regulation of non-minimum phase outputs: a flatness based approach. In: Perspectives in Control. Springer, pp. 143–163.
- Gliklikh, Y. E., 2006. Necessary and sufficient conditions for global-in-time existence of solutions of ordinary, stochastic, and parabolic differential equations. Abstract and Applied Analysis 2006.
- Han, J., 2009. From pid to active disturbance rejection control. Industrial Electronics, IEEE transactions on 56 (3), 900–906.
- Hogben, L., 2006. Handbook of linear algebra. CRC Press.
- Johnson, C., 1971. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. Automatic Control, IEEE Transactions on 16 (6), 635–644.
- Khalil, H., 2002. Nonlinear Systems. Prentice Hall.
- Pontryagin, L., 1962. Ordinary Differential Equations. Addison-Wesley.
- Poznyak, A. S., Utkin, V., Vostrikov, A., 1996. Russia [control education]. Control Systems, IEEE 16 (2), 37–40.
- Schipanov, G., 1939. Theory and methods of designing automatic regulators. Avtomatika i Telemekhanika 4, 49–66.

- Sira-Ramírez, H., Agrawal, S. K., 2004. Differentially flat systems. Vol. 17. CRC Press.
- Sira-Ramírez, H., Núñez, C. A., Visairo, N., 2010a. Robust sigma-delta generalised proportional integral observer based control of a buckconverter with uncertain loads. *International Journal of Control* 83 (8), 1631–1640.
- Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., Rodríguez-Angeles, A., 2010b. On the linear control of nonlinear mechanical systems. In: *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 1999–2004.
- Tian, G., Gao, Z., 2009. From poncelet's invariance principle to active disturbance rejection. In: *American Control Conference, 2009. ACC'09. IEEE*, pp. 2451–2457.
- Zak, S. H., 1990. On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 35 (5), 604–607.
- Zheng, Q., Gao, Z., 2010. On practical applications of active disturbance rejection control. In: *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese. IEEE*, pp. 6095–6100.

## Apéndice A. Una demostración del resultado principal basada en la teoría de perturbaciones singulares

Considere el problema de seguimiento de una trayectoria conocida suave  $y^*(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , por medio de una ley de control realimentado,  $u$ , definido sobre el siguiente sistema dinámico  $n$ -dimensional, suave,

$$\dot{y}^{(n)} = \phi(t, y)u + \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (A.1)$$

donde  $\phi(t, y)$  es conocida, uniformemente acotada y alejada de cero, i.e.,  $\sup_t |\phi(t, y(t))| > \delta > 0$ . La función escalar,  $\psi(\cdot) = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ , es completamente desconocida excepto por el hecho de ser uniformemente acotada de manera absoluta al igual que todas y cada una de sus derivadas temporales hasta un orden finito  $m$ . En otras palabras,  $\sup_t |\psi^{(i)}(\cdot)| \leq K_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ . El entero  $m$  es un parámetro de diseño que se elige de bajo orden (típicamente  $m = 3$  a  $m = 5$ ). Sea  $\{\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}\}$  un conjunto de coeficientes reales, escogidos de tal forma que el siguiente polinomio en la variable compleja  $s$ , es Hurwitz,

$$p_{cl}(s) = s^n + \kappa_{n-1}s^{n-1} + \dots + \kappa_1s + \kappa_0 \quad (A.2)$$

De igual forma, sean  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n+m-1}\}$  coeficientes reales escogidos de tal forma que el siguiente polinomio en la variable compleja  $s$ ,  $p_{obs}(s) = s^{n+m} + \lambda_{n+m-1}s^{n+m-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0$  también es Hurwitz. Definiendo:  $y_i = y^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , el sistema (A.1) puede escribirse en la representación (canónica) de estado siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-2 \\ \dot{y}_{n-1} &= \phi(t, y_0)u + \psi(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Considere el siguiente controlador linealizante, basado en observador, que incluye un término de cancelación de no linealidades,  $\hat{\psi}$ ,

$$u = \frac{1}{\phi(t, y)} \left[ -\hat{\psi} + [y^*(t)]^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i (\hat{y}_i - [y^*(t)]^{(i)}) \right] \quad (A.4)$$

<sup>2</sup>Si esta condición no se satisface en casi todas partes para cualquier entero finito  $m$  entonces, las soluciones  $y(t)$  de (A.1) no existen del todo para cualquier función de entrada  $u$  finita (véase (Gliklikh, 2006))

donde  $\hat{y}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $y$ ,  $\hat{\psi} = z_1$ , son variables generadas por el siguiente observador de Luenberger extendido (también llamado, observador GPI),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_{n+m-1}(y - \hat{y}_0) \\ \dot{\hat{y}}_j &= \hat{y}_{j+1} + \lambda_{n+m-j-1}(y - \hat{y}_0), \quad j = 1, \dots, n-2 \\ \dot{\hat{y}}_{n-1} &= \phi(t, y)u + z_1 + \lambda_m(y - \hat{y}_0) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}(y - \hat{y}_0) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i}(y - \hat{y}_0), \quad i = 2, \dots, m-1 \\ \dot{z}_m &= \lambda_0(y - \hat{y}_0) \end{aligned} \quad (A.5)$$

Defínase  $\tilde{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Se obtiene entonces la siguiente representación de la dinámica del vector de variables de fase del error de estimación,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_0 &= \tilde{e}_1 - \lambda_{n+m-1}\tilde{e}_0 \\ \dot{\tilde{e}}_j &= \tilde{e}_{j+1} - \lambda_{n+m-j-1}\tilde{e}_0, \quad j = 1, \dots, n-2 \\ \dot{\tilde{e}}_{n-1} &= \psi(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) - z_1 - \lambda_m\tilde{e}_0 \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}\tilde{e}_0 \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i}\tilde{e}_0, \quad i = 2, \dots, m-1 \\ \dot{z}_m &= \lambda_0\tilde{e}_0 \end{aligned} \quad (A.6)$$

Haciendo  $\tilde{e} = \tilde{e}_0$ , el error de estimación de la salida  $\tilde{e}_0 = \tilde{e} = y - \hat{y}_0$ , satisface la siguiente ecuación diferencial perturbada de orden  $n+m$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{(n+m)} + \lambda_{n+m-1}\tilde{e}^{(n+m-1)} + \dots + \lambda_1\dot{\tilde{e}} + \lambda_0\tilde{e} &= \psi^{(m)}(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = \\ &= \psi^{(m)}(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (A.7)$$

donde  $e = y - y^*(t)$  se define como el error de seguimiento de salida. Hágase  $\lambda_{n+m} = 1$  y substitúyase (A.3) en (A.1). Luego de sumar y restar  $y_i$  al factor  $(\hat{y}_i - [y^*(t)]^{(i)})$  contenido en la suma en (A.4), entonces, el error de seguimiento para el sistema en lazo cerrado y el error de estimación de salida (A.7), satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales perturbadas de orden superior,

$$\begin{aligned} e^{(n)} + \kappa_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \kappa_0e &= \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \tilde{e}_i + \\ &+ \left[ \psi(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) - \hat{\psi} \right] \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{(n+m)} + \lambda_{n+m-1}\tilde{e}^{(n+m-1)} + \dots + \lambda_1\dot{\tilde{e}} + \lambda_0\tilde{e} &= \\ \psi^{(m)}(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (A.9)$$

**Hecho 1.** A partir de (A.6) se sigue que si  $\tilde{e}_0$  es idénticamente cero, entonces  $\tilde{e}_0 = \tilde{e}_1 = \dots = \tilde{e}_{n-1} = 0$ . En particular, de la ecuación diferencial  $\tilde{e}_{n-1}$  en (A.6),  $\dot{\tilde{e}}_{n-1} = \psi(t, y_0, \dots, y_{n-1}) - z_1 - \lambda_m\tilde{e}_0$ . Se sigue que si  $\tilde{e}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , son idénticamente cero, entonces  $z_1 = \hat{\psi}$  es un estimado exacto del término no lineal  $\psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ . Más aún  $z_j = \psi^{(j-1)}(\cdot)$  para  $j = 2, \dots, m$  y  $\dot{z}_m = \psi^{(m)}(\cdot)$ . Este hecho será usado más tarde, en el contexto de un análisis de perturbaciones singulares del sistema en lazo cerrado (A.8)-(A.9).

**Hecho 2.** En forma similar, a partir de la misma ecuación (A.5), si todos los  $\tilde{e}_i$  no fuesen idénticamente cero, sino uniformemente arbitrariamente cercanos a cero, entonces,  $z_1 = \hat{\psi}$ , sería un estimado uniformemente, definitivamente, arbitrariamente cercano al término no lineal  $\psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ . Esto justifica nuestra elección de notación al llamar  $\hat{\psi}$  a la variable  $z_1$ .

### Diseño del observador de alta ganancia

Sean  $\epsilon$  y  $\lambda$  parámetros reales estrictamente positivos, (con, digamos,  $\lambda > 1$ ). Escogiendo las ganancias del observador  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n+m-1}\}$ , en (A.5), como:

$$\lambda_{n+m-i} = \frac{(n+m)!}{i!(n+m-i)!} \left(\frac{\lambda}{\epsilon}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots, n+m, \quad (\text{A.10})$$

se obtiene, a partir de la ecuación (A.9), la siguiente dinámica perturbada del error de observación, escrita en forma de operador diferencial:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{\epsilon}\right)^{n+m} \tilde{e} = \psi^{(m)}(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) \quad (\text{A.11})$$

Multiplicando la expresión por  $\epsilon^{n+m}$  se obtiene el sistema equivalente:

$$\left(\epsilon \frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n+m} \tilde{e} = \epsilon^{n+m} \psi^{(m)}(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) \quad (\text{A.12})$$

### Análisis basado en Perturbaciones Singulares

Resumiendo, el sistema en lazo cerrado y la dinámica inyectada del observador de alta ganancia satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales, susceptibles de un análisis de perturbaciones singulares, puesto que son fácilmente reducibles a la llamada *forma normal*

$$e^{(n)} + \kappa_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \kappa_0 e = \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} & \psi(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) - \hat{\psi} + \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \tilde{e}_i \\ & \left(\epsilon \frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n+m} \tilde{e} = \quad (\text{A.14}) \\ & \epsilon^{n+m} \psi^{(m)}(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento estándar en el Análisis mediante Perturbaciones Singulares, primero se obtiene el *sistema de orden reducido*, haciendo formalmente  $\epsilon = 0$  en las ecuaciones: (A.13)(A.14). Esto resulta en  $\lambda^{n+m} \tilde{e} = 0$  es decir,  $\tilde{e} = 0$  es la única solución de equilibrio trivial de la dinámica del error de observación perturbada singularmente. Se procede a reemplazar esta solución de equilibrio,  $\tilde{e} = 0$ , en (A.13). Recordando del Hecho 1, que siempre que  $\tilde{e}$  y sus derivadas son cero entonces  $z_1 = \hat{\psi}(\cdot) = \psi(\cdot)$ , y también  $\tilde{e}_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Se obtiene entonces el sistema de orden reducido para la dinámica del error de seguimiento dado por  $\tilde{e}^{(n)} + \kappa_{n-1}\tilde{e}^{(n-1)} + \dots + \kappa_0 \tilde{e} = 0$ . Por la hipótesis inicial sobre los parámetros  $\kappa_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , del controlador, el sistema de orden reducido tiene al origen como punto de equilibrio asintóticamente exponencialmente estable de forma global. El sistema de *capa de frontera* correspondiente, descrito en la escala de tiempo expandida,  $\tau = t/\epsilon$ , y distinguido mediante la variable de corrección  $e_z = \tilde{e} - 0 = \tilde{e}$ , satisface la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea asintóticamente exponencialmente estable

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \lambda\right)^{n+m} \tilde{e}_z = 0, \quad (\text{A.15})$$

obtenida haciendo  $\epsilon = 0$  en el miembro derecho de (A.14) y realizando el re-escalamiento natural del tiempo  $\epsilon \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$ . El equilibrio  $\tilde{e}_z = 0$  es asintóticamente estable independientemente de las condiciones iniciales,  $e(0)$ , del error de seguimiento. En otras palabras, el origen es *uniformemente asintóticamente estable* en las condiciones iniciales  $e(0)$ . También, cualquier condición inicial  $e_z(0)$ , para el sistema de capa de frontera (A.15) está, trivialmente, en su dominio de atracción. El autovalor repetido  $-\lambda$ , de la linealización redundante alrededor del origen del sistema de capa de frontera (A.15) es estrictamente negativo y puede hacerse menor que un número real negativo finito  $-c$  haciendo simplemente  $\lambda > c$ . Se sigue de la discusión anterior que se satisfacen todas las hipótesis del teorema de Tikhonov. Por lo tanto, para un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, el error de observación  $\tilde{e}$ , y sus derivadas temporales, evolucionan, uniformemente en el tiempo, de una forma estable, dentro de una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio de fase de los errores de observación,  $(\tilde{e}, \dots, \tilde{e}^{(n+m-1)})$ . Esta vecindad está claramente determinada por  $\epsilon$ . Ciertamente, haciendo  $d/d\tau$  igual a cero en (A.14) se obtiene el siguiente equilibrio cuasi-estacionario para el error de estimación  $\tilde{e}$ :

$$\tilde{e} = \left(\frac{\epsilon^n}{\lambda^{n+m}}\right) \frac{d^m}{d\tau^m} \left[\psi(t, e + y^*(t), \dot{e} + \dot{y}^*(t), \dots, e^{(n-1)} + [y^*(t)]^{(n-1)})\right] \quad (\text{A.16})$$

Un estimado del radio de una esfera de acotamiento definitiva para las trayectorias de  $\tilde{e}$  se obtiene a partir de  $\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^{(n+m)} K_m$ , con  $K_m$  siendo la cota uniforme y absoluta hipotetizada sobre  $\psi^{(m)}(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ . Es claro que tiene sentido la previsión de hacer  $\lambda$  mayor que la unidad. En estas circunstancias, a partir del Hecho 2, a diferencia  $\psi - \hat{\psi}$  resulta también arbitrariamente pequeña y la estimación de la no linealidad puede hacerse tan aproximada como sea necesario.

### Diseño del Controlador

Recordando que  $\hat{\psi}(\cdot)$  es definitivamente arbitrariamente cercana a la perturbación agregada,  $\psi(\cdot)$ , y que los errores de estimación de las variables de fase  $\tilde{e}_i$  convergen definitivamente, en forma predominantemente exponencial, a vecindades arbitrariamente pequeñas del origen.

$$e^{(n)} + \kappa_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \kappa_0 e = \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_i \tilde{e}_i + \psi(\cdot) - \hat{\psi}$$

Se sigue entonces que para ubicaciones moderadamente lejanas del eje imaginario, en la parte izquierda del plano complejo, de las raíces del polinomio característico (A.2), el sistema lineal producirá errores de seguimiento y derivadas de este error que son también cercanos al origen. Al igual que antes, a mayor magnitud de estas raíces, menor el radio de la vecindad del origen donde convergen el error de seguimiento y sus derivadas.